Simulazione esame n 1

09. 12. 2014

Matematica – C. d. L. in Produzioni Animali e Controllo della Fauna Selvatica

Non è permesso l'utilizzo di libri, telefoni cellulari o appunti.

1. Quante sequenze di 8 caratteri si possono formare con le seguenti proprietà:

   a) I primi 3 caratteri sono lettere distinte dell'alfabeto italiano (con 21 lettere);

   b) I rimanenti 5 caratteri sono numeri da 0 a 9.

2. Risolvere la seguente disequazione: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x^2-4} > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3x}$.

3. Dato il grafico di $y = f(x)$ allegato, determinare il dominio di $f(x)$, stabilire se è iniettiva e se è suriettiva, e determinare, se esitono, tutti i punti in cui $f'(x) = 0$.

4. Determinare le costanti A, B, C, D in modo che il grafico della funzione $y = A + B\,\mathrm{sen}(Cx + D)$ abbia periodo pari a $\frac{\pi}{3}$, un massimo di valore 2 nel punto $x = \pi$ e un minimo di valore -4.

5. Calcolare i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $y = \sqrt{(4-x)(x-1)}$ nel suo insieme di definizione.

6. Calcolare il seguente integrale indefinito, con il metodo di integrazione per parti: $\int x \log x \, dx$.

7. Determinare tutte le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y - 4z = 1 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$$

E5 Quante sequenze di 8 caratteri si possono formare con le seguenti proprietà:

a) i primi 3 caratteri sono lettere distinte dell'alfabeto italiano (con 21 lettere)

b) i rimanenti 5 caratteri sono numeri da 0 a 9

Soluzione

ordine

$$\underbrace{\_\ \_\ \_}_{\text{21 lettere}} \;|\; \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\text{cifre } 0\ldots9}$$

21 lettere — cifre 0...9 (=> sono 10 cifre)

ordine no ripetizioni — ordine ripetizione (in b non specifica caratteri distinti)

$$D_{21,3} \cdot D'_{10,5} =$$

$$= 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 10^5 = 798000000$$

15. Risolvere la seguente disequazione

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x^2-4} > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3x}$$

Soluzione

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x^2-4} > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3x}$$

c'è già la stessa base $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ in entrambi i membri.

base $= \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$

quindi passo agli esponenti cambiando il verso della disequazione

cambio verso

$$x^2 - 4 < 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 < 0$$

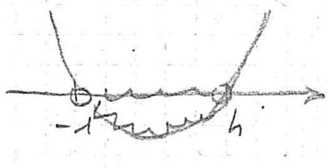
risolvo con la parabola $\cup$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 - 4(1)(-4)}}{2(1)} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} =$$

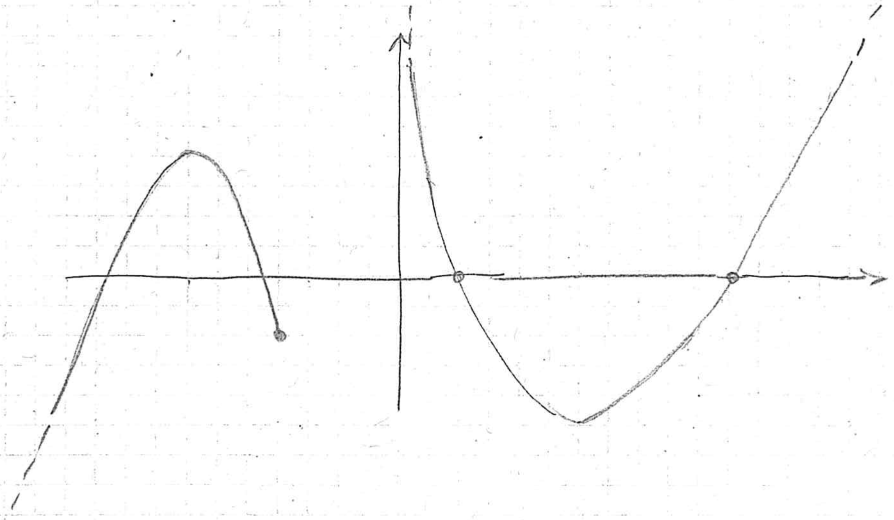
$$= \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$



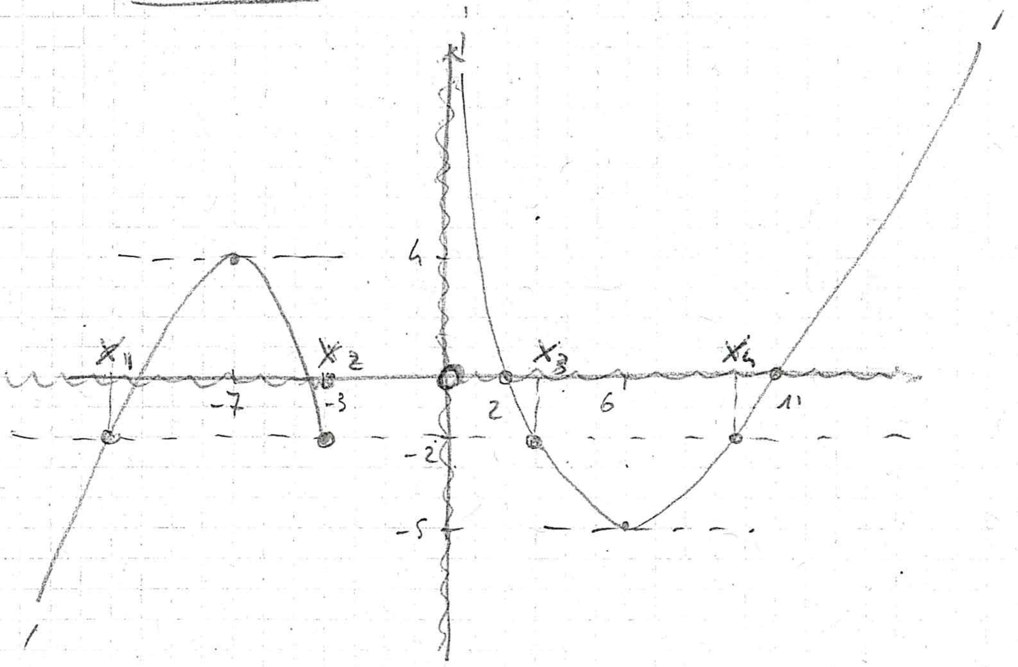
$\}\ y < 0$

Soluzione: $-1 \leq x \leq 4$

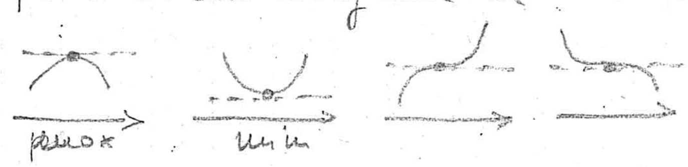
25 Dato il grafico di $f(x)$, determinare il dominio di $f(x)$, stabilire se è iniettiva e se è suriettiva (su $\mathbb{R}$) e determinare, se esistono, tutti i punti in cui $f'(x)=0$



Soluzione



- Dominio: $]-\infty; -3] \cup]0; +\infty[$
- funzione non iniettiva perché per esempio x_1, x_2, x_3, x_4 hanno tutti come immagine -2
- $\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \Rightarrow$ funzione suriettiva
- I punti per cui $f'(x)=0$ sono punti la cui tangente al grafico è orizzontale tipo



in questo ci sono i punti

$x_0 = -7$ e $x_0 = 6$
(max rel.) (min rel.)

35

Determinare le costanti A, B, C, D in modo che il grafico della funzione $y = A + B\,\text{sen}(Cx + D)$ abbia periodo pari a $\frac{\pi}{3}$, un massimo di valore 2 nel punto $x_0 = \pi$ e un minimo di valore -4

[es. della simulazione d'esame 2014/2015 prof. Morigi]

Soluzione Dai dati del problema deduco queste informazioni:

- $P = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 2\cancel{\pi}\cdot\frac{3}{\cancel{\pi}} = 6$
- $M = 2$ con $x_M = \pi$
- $m = -4$ (x_m = ignoto)
- $f(x) = a\,\text{sen}(\omega(x - x_0)) + y_0$ (ho assegnato all'ampiezza il simbolo "a" per non confonderlo con "A" citato nel testo)

- Quando la funzione $f(x)$ si basa sul seno si ha che x_0 è il valore medio tra un punto di max e uno di min consecutivi

con $x_m = x_M - \frac{P}{2} = \pi - \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}} = \pi - 3$

$\Rightarrow x_0 = \frac{x_M + x_m}{2} = \frac{\pi + \pi - 3}{2} = \frac{2\pi - 3}{2} = \pi - \frac{3}{2}$

- L'ampiezza "a" è la metà della distanza tra il valore di max M e il valore di minimo m $\Rightarrow a = \frac{|M - m|}{2} = \frac{|2 - (-4)|}{2} = \frac{6}{2} = 3$

- y_0 è il valor medio tra il valore massimo M e il valore min m

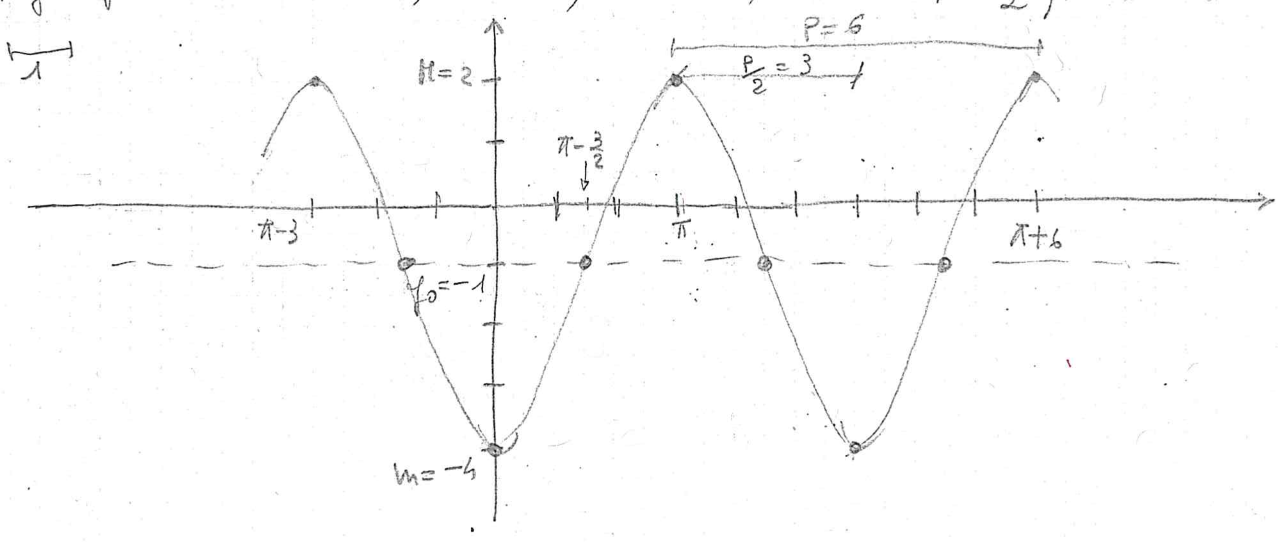
$\Rightarrow y_0 = \frac{M + m}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

Quindi $f(x) = a\,\text{sen}(\omega(x - x_0)) + y_0$ diventa

$f(x) = 3\,\text{sen}\left(6\left(x - \left(\pi - \frac{3}{2}\right)\right)\right) - 1$

da cui $f(x) = 3\,\text{sen}\left(6x - 6\left(\pi - \frac{3}{2}\right)\right) - 1$

e per rimapparla in $f(x) = A + B\,\text{sen}(Cx + D)$ significa che $A = -1$; $B = 3$; $C = 6$; $D = -6\left(\pi - \frac{3}{2}\right)$



ES Calcolare i punti di max e min assoluti della funzione $f(x)=\sqrt{(4-x)(x-1)}$ nel suo insieme di definizione

derivata composta

Soluzione

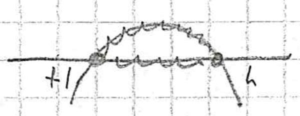
$f(x)=\sqrt{(4-x)(x-1)}=\sqrt{4x-4-x^2+x}=\sqrt{-x^2+5x-4}$

$D_f: -x^2+5x-4\geq 0$ uso la parabola $-x^2+5x-4=0$

$\underbrace{(4-x)}_{=0}\underbrace{(x-1)}_{=0}=0$

$4-x=0 \quad x=4$

$x-1=0 \quad x=1$



$+1\leq x\leq 4$

quindi $D_f: [+1;4]$ intervallo limitato e chiuso per cui vale il T. Weierstrass

- Calcolo $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}\cdot(-2x+5)=\frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}$$

- Cerco i punti a derivata nulla

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}=0 \Rightarrow -2x+5=0 \quad \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}}=\frac{-5}{-2} \quad x=\frac{5}{2}$$

$\Rightarrow x_1=\frac{5}{2}$ punto a derivata nulla

- Cerco i punti "non derivabili"

$D': -x^2+5x-4>0$ stessi passaggi di sopra

$D'=(+1,4)$

quindi
$x_2=+1$ e $x_3=4$ sono punti $\notin D'$ e $\in D$
quindi sono punti "non derivabili" (cioè dove non esiste f' ma esiste f)

- Tabella per trovare max/min assoluto

	x_0	$f(x_0)$
punti a derivata nulla	$x_0=\frac{5}{2}$	$f\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{\left(4-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-1\right)}=\sqrt{\frac{8-5}{2}\cdot\frac{5-2}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\boxed{\frac{3}{2}}$
punti non derivabili	$x_1=+1$	$f(+1)=\sqrt{(4+1)(+1-1)}=\sqrt{5\cdot 0}=\boxed{0}$
	$x_2=4$	$f(4)=\sqrt{(4-4)(4-1)}=\sqrt{0\cdot 3}=\boxed{0}$
estremi	$a=+1$	già calcolato
	$b=4$	già calcolato

Quindi
- $\frac{3}{2}$ è il valore di max assoluto nel punto $x_0=\frac{3}{2}$
- 0 è il valore di min assoluto nei punti $x_0=1$ e $x_0=4$

controllo che siano tutti valori $\in[1;4]$ altrimenti li scarto

ES Calcolare con il metodo di integrazione per parti

$$\int x \ln x \, dx$$

Soluzione Integrazione per parti

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = \underbrace{f(x)}_{\uparrow\ \int f'(x)} \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

quindi

$$\int \underbrace{x}_{f'}\, \underbrace{\ln x}_{g}\, dx = \underbrace{\overbrace{\frac{x^2}{2}}^{f}}_{\uparrow\ \int x\, dx} \cdot \overbrace{\ln x}^{g} - \int \overbrace{\frac{x^{\cancel{2}}}{2}}^{f} \cdot \overbrace{\frac{1}{\cancel{x}}}^{g'}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + c =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$$

85

Determinare tutte le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x+5y-4z-1=0 \\ x+y+5z+1=0 \end{cases}$$

(esercizio esame di simulazione prof. Mongi)

Soluzione

trasformo il sistema in forma normale

$$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x+5y-4z=1 \\ x+y+5z=-1 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

in forma matriciale $A \cdot v = B$

$$\text{è} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Risolvo con l'algoritmo di Gauss Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ \\ R_3-R_1 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2-2R_1 \rightarrow \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & +2 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ \\ R_3+R_2 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{R_3}{10} \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} R_1+3R_3 \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2-2R_3 \rightarrow \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} R_1-2R_2 \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

rango $A = 3$
rango $\bar{A} = 3$ =
$n = 3$
quindi sistema compatibile con unica soluzione

Quindi questo corrisponde a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

il sistema ha una soluzione